Procesos Estocásticos

Dr. Juan Pablo I. Ramírez Paredes

Departamento de Electrónica
Universidad de Guanajuato

Maestría en Ing. Eléctrica

Índice

Concepto de Proceso Estocástico

- Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es una regla que asigna a cada resultado ζ una función $\mathbf{x}(t,\zeta)$.
- Un proceso estocástico es una familia de funciones en el tiempo, que dependen de un parámetro ζ.
- El dominio de ζ son todos los posibles resultados de un experimento, mientras que el dominio de t es un conjunto de números reales

Campus Irapuato-Salamanca
División de Ingenierías
Departamento de Ingeniería Electrónica

Estadísticas de un Proceso Estocástico

- Un proceso estocástico contiene infinitas variables aleatorias, no contables, una para cada t.
- Para cada t, $\mathbf{x}(t)$ es una variable aleatorio con distribución

$$F(x,t) = P(\{\mathbf{x}(t) \leq x\})$$

- El evento $\{\mathbf{x}(t) \leq x\}$ consiste de todos los resultados ζ_i tales que $\mathbf{x}(t,\zeta_i)$ no exceda x.
- La función $F(x,t)$ es llamada distribución de primer orden del proceso $\mathbf{x}(t)$.
- La función

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

es la densidad de primer órden de $\mathbf{x}(t)$.

Estadísticas de un PE

- La distribución de segundo orden de un proceso $\mathbf{x}(t)$ es la distribución conjunta

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2\})$$

de las variables aleatorias $\mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}(t_2)$.

- La densidad de segundo orden es

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

- La distribución de orden n de $\mathbf{x}(t)$ es la distribución conjunta

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$$

de las variables aleatorias $\mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_n)$.

Propiedades de segundo orden

- La *media* $\eta(t)$ de $\mathbf{x}(t)$ es el valor esperado de la variable aleatoria $\mathbf{x}(t)$

$$\eta(t) = E\{\mathbf{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx$$

- La *autocorrelación* $R(t_1,t_2)$ de $\mathbf{x}(t)$ es el valor esperado del producto $\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)$

$$R(t_1,t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- La *autocovarianza* $C(t_1,t_2)$ de $\mathbf{x}(t)$ es la covarianza de las VAs $\mathbf{x}(t_1)$ y $\mathbf{x}(t_2)$.

Definiciones

- Las estadísticas conjuntas de dos procesos reales $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ están determinadas por la distribución conjunta de las variables aleatorias $\mathbf{x}(t_1),\ldots,\mathbf{x}(t_n),\mathbf{y}(t_1'),\ldots,\mathbf{y}(t_2')$.
- Un proceso vectorial ó proceso n-dimensional es una familia de n procesos estocásticos.
- La autocorrelación también está definida para procesos $\mathbf{x}(t)$ complejos.

$$R_{xx}(t_1,t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}^*(t_2)\}$$

$$R(t_2,t_1) = E\{\mathbf{x}(t_2)\mathbf{x}^*(t_1)\} = R^*(t_1.t_2)$$

Definiciones

- La autocorrelación es una función positiva definida, lo que significa que

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geq 0$$

que implica que

$$R(t,t) = E\{|\mathbf{x}(t)|^2\} \geq 0$$

Definiciones

- La razón
$$r(t_1,t_2)=\frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{C(t_1,t_1)C(t_2,t_2)}}$$
es llamada *coeficiente de correlación* del proceso $\mathbf{x}(t)$.
- Dos procesos $\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)$ son llamados *ortogonales* si $R_{xy}(t_1,t_2)=0$ para toda t_1,t_2.
- Dos procesos $\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)$ son llamados *no correlacionados* si $C_{xy}(t_1,t_2)=0$ para toda t_1,t_2.
- Un proceso $\mathbf{x}(t)$ es *a-dependiente* si $C(t_1,t_2)=0$ para $|t_1-t_2|>a$.

Definiciones

- Dos procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ son independientes si las variables aleatorias $\mathbf{x}(t_1),\ldots,\mathbf{x}(t_n),\mathbf{y}(t_1'),\ldots,\mathbf{y}(t_n')$ son mutuamente independientes.
- Un proceso $\mathbf{x}(t)$ es llamado normal si las VAs $\mathbf{x}(t_1),\ldots,\mathbf{x}(t_n)$ son conjuntamente normales para cualquier n y $t_1,\ldots,t_n$.
- Para un proceso normal,

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \eta(t) \quad \sigma_x^2(t) = C(t,t)$$

y sus estadísticas están completamente determinadas por $\eta(t)$ y $C(t_1,t_2)$.

Ruido blanco

- Un proceso $\mathbf{v}(t)$ es llamado *ruido blanco* si sus valores $\mathbf{v}(t_i)$ y $\mathbf{v}(t_j)$ son no-correlacionados para cada t_i y $t_j \neq t_i$

$$C(t_i, t_j) = 0 \qquad t_i \neq t_j$$

- La autocovarianza de un proceso no trivial de ruido blanco debe tener la forma

$$C(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad q(t) \geq 0$$

- Si las VAs $\mathbf{v}(t_i)$ y $\mathbf{v}(t_j)$ son no solamente no-correlacionadas, sino independientes, entonces $\mathbf{v}(t)$ es llamado *ruido estrictamente blanco*.

Procesos especiales

- Proceso de Poisson.
- Caminata aleatoria.
- Proceso de Wiener.

Proceso de Poisson

- Los puntos de Poisson se caracterizan por dos propiedades:
  - El número $\mathbf{n}(t_1, t_2)$ de puntos $\mathbf{t}_i$ en un intervalo (t_1, t_2) de longitud $t = t_2 - t_1$ es una VA de Poisson con parámetro λt.
  - Si los intervalos (t_1, t_2) y (t_3, t_4) no tienen traslape, entonces las VAs $\mathbf{n}(t_1, t_2)$ y $\mathbf{n}(t_3, t_4)$ son independientes.
- El proceso de Poisson se forma utilizando los puntos $\mathbf{t}_i$ para crear el proceso estocástico

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}(0, t)$$

- Para una $t$específica, $\mathbf{x}(t)$ es una VA de Poisson con parámetro λt, por lo que $E\{\mathbf{x}(t)\} = \eta(t) = \lambda t$.
- La autocorrelación de $\mathbf{x}(t)$ es

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

Campus Irapuato-Salamanca División de Ingenierías Departamento de Ingeniería Electrónica

Caminata aleatoria

- Se lanza una moneda justa un número infinito de veces. Los lanzamientos son cada T segundos, y cada vez que la moneda cae se toma un paso instantáneo de longitud s a la izquierda o derecha, según haya caído águila o sol en el lanzamiento.
- Si se denota por k el número de águilas y $n-k$ el número de soles (pasos a la izq. o der.), la posición en el tiempo $t = nT$ es

$$\mathbf{x}(nT) = ks - (n-k)s = ms \quad m = 2k - n$$

Caminata aleatoria

- El proceso $\mathbf{x}(nT)$ puede escribirse como la suma

$$\mathbf{x}(nT) = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n$$

donde $\mathbf{x}_i$ es el tamaño del i-ésimo paso. Las VAs $\mathbf{x}_i$ son independientes y toman los valores $\pm s$, con $E\{\mathbf{x}_i\} = 0$ y $E\{\mathbf{x}_i^2\} = s^2$. Por lo tanto,

$$E\{\mathbf{x}(nT)\} = 0 \qquad E\{\mathbf{x}^2(nT)\} = ns^2$$

Proceso de Wiener

- El proceso de Wiener es el límite de una caminata aleatoria $\mathbf{x}(t)$ cuando $T \to 0$, haciendo $s^2 = \alpha T$

$$\mathbf{w}(t) = \lim \mathbf{x}(t) \quad T \to 0$$

- En el límite, $s \to 0$ mientras $T \to 0$.
- La densidad de primer orden de $\mathbf{w}(t)$ es

$$f(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{-w^2/2\alpha t}$$

- La autocorrelación de $\mathbf{w}(t)$ es

$$R(t_1,t_2) = \alpha \min(t_1,t_2)$$

- Si $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$, los incrementos $\mathbf{w}(t_4) - \mathbf{w}(t_3)$ y $\mathbf{w}(t_2) - \mathbf{w}(t_1)$ de $\mathbf{w}(t)$ son independientes.

Campus Irapuato-Salamanca
División de Ingenierías
Departamento de
Ingeniería Electrónica

Procesos Estacionarios

- Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es llamado *estacionario en sentido estricto (SSS, strict sense stationary)* si sus propiedades estadísticas son invariantes a un cambio de origen, esto es, $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}(t+c)$ tienen las mismas estadísticas para cualquier c.
- Dos procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ son *conjuntamente estacionarios* si sus estadísticas conjuntas son las mismas que las estadísticas conjuntas de $\mathbf{x}(t+c)$ y $\mathbf{y}(t+c)$ para cualquier c.
- La densidad de orden n para un proceso SSS debe ser tal que

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = f(x_1,\ldots,x_n;t_1+c,\ldots,t_n+c)$$

para cualquier c.

Procesos Estacionarios

- La densidad de primer orden de $\mathbf{x}(t)$ es independiente de t

$$f(x;t) = f(x)$$

- La densidad conjunta de las VAs $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}(t+\tau)$ es independiente de t.

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$.

Procesos Estacionarios

- Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es llamado *estacionario en sentido amplio (WSS, wide sense stationary)* si su media es constante

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \eta$$

y su autocorrelación solamente depende de $\tau = t_2 - t_1$

$$E\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^*(t)\} = R(\tau)$$

- La potencia promedio de un proceso WSS es independiente de t y es

$$E\{\left|\mathbf{x}(t)\right|^2\} = R(0)$$

Procesos Estacionarios

- La autocovarianza de un proceso WSS solamente depende de $\tau = t_1 - t_2$
$$C(\tau) = R(\tau) - |\eta|^2$$
y su coeficiente de correlación es
$$r(\tau) = C(\tau)/C(0)$$
por lo tanto, $C(\tau)$ es la covarianza y $r(\tau)$ es el coeficiente de correlación de las VAs $\mathbf{x}(t+\tau)$ y $\mathbf{x}(t)$.

Otras formas de estacionalidad

- Un proceso $\mathbf{x}(t)$ es *asintóticamente estacionario* si

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1+c,\ldots,t_n+c)$$

tiende a un límite que no depende de c mientras $c\to\infty$.

- Un proceso $\mathbf{x}(t)$ es *estacionario de orden* N si

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=f(x_1,\ldots,x_n;t_1+c,\ldots,t_n+c)$$

solo se cumple para $n\leq N$.

- El proceso $\mathbf{x}(t)$ es *estacionario en un intervalo* si

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=f(x_1,\ldots,x_n;t_1+c,\ldots,t_n+c)$$

se cumple para toda t_i y t_i+c en ese intervalo.

Procesos en Tiempo Discreto

- Si $\mathbf{x}[n]$ es un proceso en tiempo discreto, su media y autocorrelación están dadas por

$$\eta[n] = E\{\mathbf{x}[n]\} \quad R[n_1, n_2] = E\{\mathbf{x}[n_1]\mathbf{x}^*[n_2]\}$$

  y su autocovarianza es

$$C[n_1, n_2] = R[n_1, n_2] - \eta[n_1]\eta^*[n_2]$$

- Si $\mathbf{x}[n]$ es un proceso WSS, entonces $E\{\mathbf{x}[n]\} = \eta$ y

$$E\{\mathbf{x}[n+m]\mathbf{x}^*[n]\} = R[m]$$

Procesos en Tiempo Discreto

- En el caso en que $\mathbf{x}[n]$ proviene de muestras $\mathbf{x}(nT)$ de un proceso continuo $\mathbf{x}(t)$, las estadísticas de $\mathbf{x}[n]$ se pueden determinar a partir de las de $\mathbf{x}(t)$. En particular,

$$\eta[n] = \eta(nT) \qquad R[n_1, n_2] = R(n_1 T, n_2 T)$$

- Si $\mathbf{x}(t)$ es SSS, entonces $\mathbf{x}[n]$ es SSS. Si $\mathbf{x}(t)$ es WSS con media η y autocorrelación $R(\tau)$, entonces $\mathbf{x}[n]$ es WSS con media η y autocorrelación $R[m] = R(mT)$.

Procesos Cicloestacionarios

- Un proceso $\mathbf{x}(t)$ es llamado *cicloestacionario* o *periódicamente estacionario* si sus estadísticas son invariantes a un cambio en el origen del tiempo, dado por múltiplos enteros de una constante T llamada periodo.
- La función de distribución de $\mathbf{x}(t)$ debe satisfacer

  $$F(x_1,\ldots,x_n;t_1+mT,\ldots,t_n+mT) = F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$$

  para cualquier entero m.
- Un proceso $\mathbf{x}(t)$ es cicloestacionario *en sentido amplio (WS)* si

  $$\eta(t+mT) = \eta(t)$$

  y

  $$R(t+mT+\tau,t+mT) = R(t+\tau,t)$$

Sistemas con Entradas Estocásticas

- Dado un proceso $\mathbf{x}(t)$, asignamos a cada una de sus muestras $\mathbf{x}(t,\zeta_i)$ un valor $\mathbf{y}(t,\zeta_i)$ de acuerdo a alguna regla. De esta forma se crea otro proceso

$$\mathbf{y}(t) = T[\mathbf{x}(t)]$$

- El proceso $\mathbf{y}(t)$ es la salida de un *sistema* o transformación, cuya entrada es el proceso $\mathbf{x}(t)$.
- El sistema es *determinístico* si opera únicamente en la variable t, tratando a ζ como un parámetro.
- El sistema es *estocástico* si T opera sobre t y ζ.

Sistemas sin memoria

- Un sistema es llamado sin memoria si su salida está dada por

$$\mathbf{y}(t) = g[\mathbf{x}(t)]$$

- Para un tiempo dado $t = t_1$, la salida de $\mathbf{y}(t_1)$ depende únicamente de $\mathbf{x}(t_1)$, y no de otros valores anteriores o futuros de $\mathbf{x}(t)$.
- La densidad de primer órden de $\mathbf{y}(t)$ puede expresarse en términos de $f_x(x;t)$.
- El valor esperado de $\mathbf{y}(t)$ está dado por

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x;t) dx$$

Sistemas sin memoria

- La densidad de orden n $f_y(y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_n)$ puede determinarse a partir de la de $\mathbf{x}(t)$ cuando la transformación es el sistema

$$\mathbf{y}(t_1)=g[\mathbf{x}(t_1)],\ldots,\mathbf{y}(t_2)=g[\mathbf{x}(t_n)]$$

- Si la entrada a un sistema sin memoria es un proceso $\mathbf{x}(t)$ del tipo SSS, la salida resultante será un proceso $\mathbf{y}(t)$ también del tipo SSS.
- Por ejemplo, si el sistema $g(x_1)=y_1,\ldots,g(x_n)=y_n$ tiene una solución única,

$$f_y(y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_n)=\frac{f_x(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)}{\left|g'(x_1)\cdots g'(x_n)\right|}$$

Sistemas lineales

- Un sistema $\mathbf{y}(t) = L[\mathbf{x}(t)]$ es lineal si

$$L[\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{a}_2\mathbf{x}_2(t)] = \mathbf{a}_1 L[\mathbf{x}_1(t)] + \mathbf{a}_2 L[\mathbf{x}_2(t)]$$

  para cualesquiera $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$.
- Un sistema es *invariante en el tiempo* si su respuesta a $\mathbf{x}(t+c)$ es igual a $\mathbf{y}(t+c)$.
- La salida de un sistema lineal es una convolución

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

  donde $h(t) = L[\delta(t)]$.

Sistemas lineales

- Para cualquier sistema lineal,

$$E\{L[\mathbf{x}(t)]\} = L[E\{\mathbf{x}(t)\}]$$

- Lo anterior implica que

$$\eta_y(t) = L[\eta_x(t)]$$

ya que

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{x}(t-\alpha)\}h(\alpha)d\alpha = \eta_x(t) \star h(t)$$

Sistemas lineales

- Correlación cruzada entre la entrada y la salida

$$R_{xy}(t_1, t_2) = L_2[R_{xx}(t_1, t_2)]$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t_1, t_2 - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

- Autocorrelación de la salida a partir de la cruzada

$$R_{yy}(t_1, t_2) = L_1[R_{xy}(t_1, t_2)]$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t_1 - \alpha, t_2) h(\alpha) d\alpha$$

- Si la entrada $\mathbf{x}(t)$ a un sistema invariante en el tiempo es SSS, la salida $\mathbf{y}(t)$ será SSS.

Sis. lin.: Derivador

- Un derivador o diferenciador es un sistema lineal cuya salida es la derivada de la entrada

$$L[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{x}'(t)$$

- La media de la salida es

$$\eta_{x'}(t) = L[\eta_x(t)] = \eta'_x(t)$$

- La autocorrelación de la salida es

$$R_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Ergodicidad

- Un problema fundamental en procesos estocásticos es el estimar sus estadísticas.
- En términos generales, esta estimación requiere calcular *promedios de ensamble (ensemble average)* sobre todas las posibles t, ζ para un proceso $\mathbf{x}(t, \zeta)$.
- No siempre es posible obtener múltiples realizaciones de un proceso estocástico para estimar sus estadísticas.

Ergodicidad

DefiniciÃ^3n

Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es llamado *ergódico* si sus promedios de ensamble son iguales a promedios en el tiempo apropiados.

- Esta definición implica que cualquier estadística de $\mathbf{x}(t)$ se puede determinar a partir de una sola muestra $\mathbf{x}(t, \zeta)$ con probabilidad 1.

Proc. ergódicos en la media

- Dado un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ con media constante $E\{\mathbf{x}(t)\} = \eta$, se puede formar el promedio en el tiempo

$$\eta_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbf{x}(t)dt$$

- Se dice que el proceso $\mathbf{x}(t)$ es ergódico en la media si, con probabilidad 1,

$$\eta_T \to \eta \quad \text{mientras} \quad T \to \infty$$

- El promedio en el tiempo η_T es una VA con media

$$E\{\eta_T\} = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{x}(t)\}dt = \eta$$

Proc. ergódicos en la media

Teorema

Un proceso $\mathbf{x}(t)$ *es ergódico en la media si y sólo si su autocovarianza* $C(t_1,t_2)$ *es tal que*

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1,t_2)dt_1dt_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

Corolario

Un proceso WSS es ergódico en la media si su autocovarianza $C(\tau)=R(\tau)-\eta^2$ *es tal que*

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

Condiciones suficientes para ergodicidad en la media

1. Si $\mathbf{x}(t)$ es WSS y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| C(\tau) \right| d\tau < \infty$$

entonces $\mathbf{x}(t)$ es ergódico en la media.

2. Si $C(0) < \infty$ y $C(\tau) \to 0$ mientras $|\tau| \to \infty$, entonces $\mathbf{x}(t)$ es ergódico en la media. Por lo tanto, $\mathbf{x}(t)$ es ergódico en la media si las VAs $\mathbf{x}(t+\tau)$ y $\mathbf{x}(t)$ son no-correlacionadas para un τ suficientemente grande.

Proc. Ergódicos en la distribución

- Se desea determinar la función de distribución $F(x) = P\{\mathbf{x}(t) \leq x\}$ de un proceso estacionario $\mathbf{x}(t)$ a partir de una sola muestra en el tiempo.
- Se forma el proceso

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}(t) \leq x \\ 0 & \mathbf{x}(t) > x \end{cases}$$

- Este proceso tiene la propiedad de que $E\{\mathbf{y}(t)\} = P\{\mathbf{x}(t) \leq x\} = F(x)$.
- El proceso $\mathbf{x}(t)$ es ergódico en la distribución si el proceso $\mathbf{y}(t)$ correspondiente es ergódico en la media.

Proc. Ergódicos en la correlación

- Deseamos determinar la autocorrelación $R(\lambda) = E\{\mathbf{x}(t+\lambda)\mathbf{x}(t)\}$ del proceso estacionario $\mathbf{x}(t)$ en términos de una sola muestra.
- Se forma el proceso $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t+\lambda)\mathbf{x}(\mathrm{t})$, con lo que $E\{\mathbf{z}(t)\} = R(\lambda)$.
- El proceso $\mathbf{x}(t)$ es ergódico en la correlación si el proceso $\mathbf{z}(t)$ correspondiente es ergódico en la media.

Espectro de potencia

- El espectro de potencia, o densidad espectral $S(\omega)$ de un proceso $\mathbf{x}(t)$ es la transformada de Fourier de su autocorrelación

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- La autocorrelación, a su vez, se obtiene de la inversa

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Dado que $R(-\tau) = R^*(\tau)$, el espectro de potencia de un proceso $\mathbf{x}(t)$ real o complejo es una función real de ω

Espectro de potencia

- El espectro de potencia cruzado $S_{xy}(\omega)$ de dos procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ es la transformada de Fourier de su correlación cruzada

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- Por inversión,
-
$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- En general, $S_{xy}(\omega)$ es una función compleja.

Sistemas lineales

- Considere un sistema lineal con respuesta al impulso $h(t)$ y función de sistema

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

- La función $|H(\omega)|^2$ es el *espectro de energía* del sistema, y su transformada inversa de Fourier $F^{-1}[H(\omega)H^*(\omega)] = \rho(t)$ es la *autocorrelación determinística* de $h(t)$.
- Por el teorema de convolución,

$$\rho(t) = h(t) \star h^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau)h^*(\tau)d\tau$$

Sistemas lineales

- Si se aplica un proceso WSS $\mathbf{x}(t)$ a la entrada del sistema lineal, la salida está dada por

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

- Es posible demostrar que

$$\begin{array}{ll} R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h^*(-\tau) & R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau) \star h(\tau) \\ S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega)H^*(\omega) & S_{yy}(\omega) = S_{xy}(\omega)H(\omega) \end{array}$$

lo que lleva a...

Sistemas lineales

Teorema

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star \rho(\tau)$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2$$

Corolario

$$E\{\left|\mathbf{y}(t)\right|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega$$

Aplicaciones

- Si la entrada a un sistema es ruido blanco $\mathbf{v}(t)$ con autocorrelación $R_{vv}(\tau) = \delta(\tau)$, entonces tras aplicar el teorema anterior

$$R_{yv}(\tau) = R_{vy}(-\tau) = \delta(\tau) \star h^*(\tau) = h^*(\tau)$$

- Para determinar la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema real, basta entonces con encontrar

$$R_{yv}(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{y}(t)\mathbf{v}(t-\tau)dt$$